Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
« Гимназия № 53»

Необычная теория чисел

Выполнила Любимова Ангелина,
ученица 11 класса
Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук
Монахова Оксана Александровна
доцент ПГУ

Пенза, 2019

Оглавление

Введение

Одним из старейших разделов математики является арифметика натуральных чисел. Памятники древних египтян и вавилонян, содержащие математические факты, дошедшие до наших дней, показывают, что тогда уже были известны операции сложения, умножения натуральных и положительных рациональных (дробных) чисел. Известны были и свойства коммутативности (переместительный закон), ассоциативности (сочетательный закон) этих операций. В ходе исторического развития множество натуральных чисел, $\boldsymbol{N}$, снабженное операциями сложения и умножения, расширилось до целых чисел.

В классической теории чисел изучаются вопросы, связанные с делимостью чисел. Такие понятия теории чисел, как делитель целого числа, наибольший общий делитель двух целых чисел, простые и взаимно простые числа изучаются на уроках математики в школе в 5 – 6 классах. Некоторые вопросы теории чисел остаются за рамками школьного курса математики, а связанные с ними понятия широко применяются при решении олимпиадных задач. Примером таких объектов теории чисел являются неопределенные целочисленные уравнения. Кроме олимпиадных задач теория чисел помогает решить 19 задачу профильного экзамена по математике. Поэтому повторение теории чисел в старших классах, систематизация знаний, полученных в 5-6 классе, совершенно необходимы, что и определяет *практическую значимость* и *актуальность* представленной работы.

Работа состоит из двух частей. В первой излагаются вопросы классической теории чисел на уровне старших классов и в объеме, необходимом для решения нестандартных целочисленных задач.

Во второй части представлены результаты самостоятельного исследования. Вводится понятие множества 2-обратимых чисел, частного случая чисел, описанных в работе [2], что свидетельствует о *новизне* представленной работы. На этом множестве рассматриваются вопросы классической теории чисел. Некоторые понятия, например понятие наибольшего общего делителя, здесь раскрываются с общей точки зрения. Множество 2-обратимых чисел имеет свойства схожие со свойствами целых чисел, но на этом множестве появляется своя специфика.

Цель работы состояла в построении числового множества, отличного от множества целых чисел, со схожими свойствами.

Для достижения цели были решены следующие задачи:

- описаны свойства целых чисел и операций над ними;
- введено понятие 2-обратимого числа и определены операции сложения и умножения над 2-обратимыми числами;
- рассмотрены вопросы классической теории чисел на множестве 2-обратимых чисел.

Часть 1. «Обычная» теория чисел.

1.1. Делимость целых чисел

К целым числам относят натуральные числа, числа противоположные натуральным и число 0. На множестве Z целых чисел определены операции сложения и умножения. Операция сложения, каждой паре (a, b) целых чисел ставит в соответствие их сумму $a + b$. Операция умножения, каждой паре (a, b) ставит в соответствие их произведение ab, причем выполняются следующие условия:

1. Слагаемые в сумме и множители в произведении можно менять местами, при этом соответственно значения суммы и произведения не изменятся.

$x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

$xy = yx$ (коммутативность умножения).

2. При сложении и умножении целых чисел можно менять порядок действий, значения суммы и произведения не изменятся.

$x + (y + z) = (x +y) + z$ (ассоциативность сложения);

$x(yz) = (xy)z$ (ассоциативность умножения).

3. Сложение целого числа с 0 не изменяет этого числа. Аналогичным свойством обладает умножение целого числа на 1

$$x + 0 = x;$$
$$x \cdot 1 = x.$$

4. Для каждого целого числа x существует противоположное целое число ($-x$), такое, что
$x + (-x) = 0$.

Число 0 противоположно само себе.

5. Операции сложения и умножения связаны распределительным законом.

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Определение. Говорят, что целое число a делится на целое число b, если существует целое число c такое, что $a=bc$.

Краткое обозначение: $a \vdots b$ (a делится на b), иначе $b|a$ (b делит a). При этом говорят, a – кратно числу b, b называют делителем числа a, c – частным от деления a на b.

Делимость целых чисел обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Если $a \vdots b$, то существует только одно частное от деления a на b.

Доказательство. Пусть $a \vdots b$ и $b \neq 0$. Тогда $a=bc$ для некоторого целого числа c. Пусть $a=bc_1$. Вычтем $0=b(c-c_1)$. По условию $b \neq 0$, поэтому $c-c_1=0$. Следовательно, $c=c_1$.

Очевидны следующие факты. Пусть $b = 0$, $a \neq 0$. Не существует целого числа c, чтобы выполнялось равенство $a=0 \cdot c$. Равенство $0=0 \cdot b$ верно при любых $b \in$ Z.

Свойство 2. 0 делится на любое число. $0=a \cdot 0$ для любого $a \in$ Z.

Свойство 3. Любое целое число делится на 1 и на -1.
$a \vdots 1$, так как $a=1 \cdot a$. $a \vdots (-1)$, так как $a=(-1) \cdot (-a)$.

Свойство 4. Любое целое число, отличное от 0, делится на себя. $a \vdots a$, так как $a=a \cdot 1$.

Свойство 5. Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Доказательство. Пусть $a \vdots b$ и $b \vdots c$. Тогда существуют целые частные m и n, такие, что $a=bm$, $b=cn$. Из этих равенств следует, что $a=c(nm)$, следовательно, $a \vdots c$.

Свойство 6. Пусть $a_1 \vdots b$, $a_2 \vdots b$, …, $a_k \vdots b$ и s_1, s_2, …,s_k – произвольные целые числа. Тогда $s_1a_1+s_2a_2+\ldots+s_ka_k \vdots b$.

Свойство 7. Если a_1, a_2, …, $a_k \vdots b$, c не делится на b, то $a_1+a_2+\ldots+a_k+ c$ не делится на b.

Свойство 8. Если $a \neq 0$ и делится на b, то $|a| \geq |b|$.

Доказательство. Пусть $a \neq 0$ и делится на b. Тогда существует число c такое, что $a=bc$, кроме того $b \neq 0$. Так как, $|a| = |bc| = |b||c|$ и $a \neq 0$, то $c \neq 0$, поэтому $|c| \geq 1$. Умножим обе части последнего неравенства на $|b|$, получим: $|b||c| \geq |b|$, значит, $|a| \geq |b|$.

Свойство 9. Если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то $a = \pm b$.

Доказательство. Если $a \neq 0$, тогда $b \neq 0$.

По свойству 8 имеем $|a| \geq |b|$ и $|b| \geq |a|$ => $|a| = |b|$. Отсюда либо $a = b$, либо $a = -b$.

Свойство 10. Если $1 \vdots a$, то $a = \pm 1$.

Доказательство. Пусть $1 \vdots a$, тогда $|1| \geq |a|$, но $a \vdots 1$, поэтому $|a| \geq 1$. Из этих неравенств следует, что $a = \pm 1$.

Примеры. $4 \vdots 2$, $6 \vdots 3$, 4 не делится без остатка на 8, так как по свойству 8 модуль делимого не меньше модуля делителя.

1.2. Деление целых чисел с остатком

Определение. Деление целого числа a на целое число $b \neq 0$ означает отыскание целых чисел q и r таких, что будут выполнены следующие условия: $a = bq+r$, $0 \leq r < |b|$

Если a разделить с остатком на b, то q – неполное частное от деления a на b, r – остаток.

Теорема. Любое целое число a можно разделить на любое целое число b с одним условием $b \neq 0$, при том единственным способом.

Примеры. 35 делится на 17 с остатком 1, так как $35 = 17 \cdot 2 + 1$.

35 делится на (-17) также с остатком 1, так как $35 = (-17) \cdot (-2) + 1$.

-35 делится на 17 с остатком 16, так как $-35 = 17 \cdot (-3) + 16$.

1.3. НОД целых чисел. Алгоритм Евклида

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – целые числа.

Определение. Целое число d называют наибольшим общим делителем чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ (НОД($a_1, a_2, \dots, a_n$)), если выполняются следующие два условия:

а) каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ делится на d (говорят, d – общий делитель чисел),

б) d делится на любой общий делитель ($a_1, a_2, \dots, a_n$).

Это определение наибольшего общего делителя в теории чисел отличается от школьного определения, в котором пункт б), сформулированного выше определения, заменяется на требование, чтобы общий делитель был наибольшим из общих делителей. Но «школьное» определение нельзя применить к другим объектам, например, многочленам, для которых также определяется НОД, в «необычной» теории чисел также оно неприменимо, поэтому здесь приведено более общее определение наибольшего общего делителя.

Свойства НОД:

1. Если d и d_1 – наибольшие общие делители чисел ($a_1, a_2, \dots, a_n$), то $d_1 = \pm d$. Таким образом, наибольший общий делитель некоторой совокупности целых чисел определен неоднозначно, а с точностью до знака.
2. Пусть НОД(a_1, a_2)=d_1, НОД(d_1, a_3)=d_2, … , НОД(d_{n-2}, a_n)=d_{n-1}, тогда d_{n-1}=НОД($a_1, a_2, \dots, a_n$)
3. Если $a=bc+l$, то НОД(a, b)=НОД(b, l).
4. Если $a \vdots b$, то НОД(a, b)=$|b|$.

Примеры. НОД(35, 17) = 1,

НОД(35,7) = 7,

НОД(225, 200) = 25

Алгоритм Евклида

Пусть a, b – целые числа, $b \neq 0$. Разделим a на b с остатком. Обозначим остаток r.Если остаток не равен 0, то далее разделим b на r. Обозначим остаток r_1, если он отличен от 0, продолжим деление. Процесс деления согласно теореме о делении с остатком можно описать следующими равенствами.

$$a=bq+r \quad 0 < r < |b|$$
$$b=rq_1+r_1 \quad 0 < r_1 < r$$
$$r=r_1q_2+r_2 \quad 0 < r_2 < r_1$$
$$\dots$$
$$r_{k-2}=r_{k-1}q_k+r_k \quad 0<r_k<r_{k-1}$$
$$r_{k-2}=r_kq_{k+1} \quad r_{k+1}=0.$$

Деление продолжается до получения нулевого остатка. Описанный процесс деления предыдущего остатка на последующий называют алгоритмом Евклида.

Теорема. Наибольший общий делитель чисел a и b равен последнему отличному от нуля остатку в алгоритме Евклида, примененному к a и b.

Свойства НОД(a, b)

1. НОД(ac, bc) = НОД(a, b)c, (c – произвольное целое число $\neq 0$).
2. Если δ – общий делитель чисел a, b, то $НОД\left(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}\right)=\frac{НОД(a,b)}{\delta}$.
3. Если d = НОД(a,b), то существуют целые числа u, v такие, что $d=au+bv$ –это представление наибольшего общего делителя называется линейным представлением НОД.

Примеры. Применим алгоритм Евклида к числам 12 и 7.

Делим 12 на 7 с остатком: $12 = 7 \cdot 1 + 5$.

Делим 7 на 5: $7 = 5 \cdot 1 + 2$, остаток 2.

Делим 5 на 2 с остатком: $5 = 2 \cdot 2 + 1$.

Последнее деление 2 на 1: $2 = 2 \cdot 1 +0$, без остатка, остаток равен 0.

НОД(12,7) = 1 – это последний не равный 0 остаток.

Найдем линейное представление НОД через 12 и 7, последовательно выражая его из записанных равенств:

$1= 5 - 2 \cdot 2=(12 – 7) – (7-5) \cdot 2 = 12 – 7 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 12 - 3 \cdot 7 + 2 \cdot 12 – 2 \cdot 7 = 12 \cdot 3 +7 \cdot (-5)$.

Таким образом, линейное представление НОД(12, 7)= $1 = 12 \cdot 3 +7 \cdot (-5)$.

1.4. Неопределенные уравнения в целых числах

Пусть a, b, c – целые числа, x, y – переменные. Уравнение $a \cdot x + b \cdot y = c$ называется неопределенным уравнением в целых числах. Пара (x_0, y_0) называется решением уравнения, если равенство $a \cdot x_0+ b \cdot y_0 = c$ является верным.

Теорема 1. Уравнение $a \cdot x + b \cdot y = c$ имеет решение тогда и только тогда, когда c делится на НОД(a,b).

Теорема 2. Всякое решение (x, y) уравнения $a \cdot x + b \cdot y = c$ задается формулами

$$\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{cases}$$

где (x_0, y_0) – какое-нибудь решение уравнения $a \cdot x + b \cdot y = c$, а t – переменная, принимающая значение в Z.

При решении уравнения $a \cdot x + b \cdot y = c$ основной задачей является нахождение (x_0, y_0). Решить эту задачу можно, например, с помощью линейного представления НОД.

Пример. Найдем целочисленные решения уравнения $12 \cdot x + 7 \cdot y = 41$. Используем линейное представление НОД(12, 7): $1 = 12 \cdot 3 +7 \cdot (-5)$, найденное в предыдущем примере. Умножим обе части этого равенства на 41, получим $41 = 12 \cdot 123 +7 \cdot (-205)$, значит, пара (123, -205) образует решение нашего уравнения. Тогда общий вид решений имеет вид:

$$\begin{cases} x = 123 + 7t, \\ y = -205 - 12t. \end{cases}$$

Неопределенные уравнения имеют широкое применение, с их помощью можно решить некоторые практические задачи.

Пример. В населенный пункт, с которым установлено лишь авиационное сообщение, требуется отправить 150 контейнеров груза. В распоряжении отправителей имеются транспортные самолеты грузоподъемностью в 8 и 13 контейнеров. Сколько понадобится самолетов каждого типа, чтобы перевезти указанный груз одним рейсом? Грузоподъемность каждого самолета должна быть использована полностью.

Обозначим количество самолетов каждого типа x и y. Составим уравнение:

$$8 \cdot x + 13 \cdot y = 150.$$

НОД(8,13) = 1, значит, это уравнение имеет решение, найдем линейное представление НОД: $1 = 8 \cdot 5 + 13 \cdot (-3)$, умножим обе части последнего равенства на 150.

$150 = 8 \cdot 750 + 13 \cdot (-450)$. Пара чисел (750, -450) – решение нашего уравнения, но оно не удовлетворяет условию задачи, запишем общее решение

$$\begin{cases} x = 750 + 13t, \\ y = -450 - 8t. \end{cases}$$

Условию задачи удовлетворяют только неотрицательные целые числа, следовательно,

$$\begin{cases} 750 + 13t \ge 0, \\ -450 - 8t \ge 0. \end{cases} \quad \begin{cases} t \ge \dfrac{-750}{13}, \\ t \le \dfrac{-450}{8}. \end{cases}$$

Этой системе удовлетворяет только одно целое число t = -57. Находим

$$\begin{cases} x = 750 + 13 \cdot (-57), \\ y = -450 - 8 \cdot (-57). \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9, \\ y = 6. \end{cases}$$

Ответ: для транспортировки 150 контейнеров необходимо 9 самолетов грузоподъемностью 8 контейнеров и 6 самолетов грузоподъемностью 13 контейнеров.

Часть 2. Необычная теория чисел

2.1. Определение 2-обратимых чисел, их свойства

Во множестве рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ выделим подмножество, состоящее из числа 0 и чисел, которые можно привести к виду $a \cdot 2^{\alpha}$, где a – целое число, не делящееся на 2, а показатель степени α - любое целое число. Такую запись ненулевого числа из $\boldsymbol{Q}$ будем называть стандартной формой записи. Выделенное подмножество обозначается $\boldsymbol{Z}(2)$, а числа, входящие в него называются 2-обратимыми числами. Нетрудно установить, что все целые числа входят в $\boldsymbol{Z}(2)$.

Примеры. Какие из следующих рациональных чисел являются (2)-обратимыми числами: а) 750; б) $\frac{320}{7}$; в) 120?

Решение. а) разложим число 750 на простые множители в $\boldsymbol{Z}$: $750=2 \cdot 3 \cdot 5^3$. Отсюда заключаем, что число 750 является (2)-обратимым числом, так как в стандартной записи 750= $\frac{3\cdot 5^3}{1} \cdot 2^1$.

В случае б) $\frac{320}{7} = \frac{2^6\cdot 5}{7} = \frac{5}{7}\cdot 2^6$. Отсюда заключаем, что число $\frac{320}{7}$ не является (2)-обратимым числом.

В случае в) $120=15 \cdot 2^3$, поэтому 120 является (2)-обратимым числом.

Примеры. Число $\frac{104}{2} = 52$ $\in$ $\boldsymbol{Z}(2)$, но записи $\frac{104}{2}$ и 52 не являются стандартными. Записав число 52 в виде $13 \cdot 2^2$, получим стандартную запись, так как 13 – целое и 13 не делится на 2.

Сложение и умножение чисел из Z(2)

Складывать и умножать числа из множества $\boldsymbol{Z}(2)$ будем так же, как они складываются во множестве рациональных чисел. Затем убедимся, что полученные суммы либо равны 0, либо их можно представить в стандартном виде.

Пусть – стандартная запись числа из $\boldsymbol{Z}(2)$. Тогда 0 + 0 = 0, 0 + = . Предположим $b \cdot 2^{\beta}$ - стандартная запись другого числа из рассматриваемого множества. Покажем, что сумму выбранных чисел можно представить в стандартном виде, и поэтому, сумма чисел записанных в стандартном виде также принадлежит множеству $\boldsymbol{Z}(2)$. Опишем процесс сложения чисел, заданных в стандартном виде. В выражении $a \cdot 2^{\alpha} + b \cdot 2^{\beta}$ в паре (α, β) выберем наименьшее число γ. Вынесем 2^{γ} за скобку, в результате получим число, которое либо равно 0, либо имеет вид $\chi\text{⌐}2^{\gamma}$. У числа c выделим все делители, являющиеся степенями 2. В результате число окажется представленным в стандартном виде.

Примеры. Найдем следующие суммы:

1) $2 + 3$ в $\boldsymbol{Z}(2)$;
2) $2 + 3 \cdot 2^3$ в $\boldsymbol{Z}(2)$;

Решение. В случае а) $2 + 3 = 5$ в $\boldsymbol{Z}(2)$; б) $2 + 3 \cdot 2^3 = 2(1 + 3 \cdot 4) = 13 \cdot 2^1$ в $\boldsymbol{Z}(2)$.

Умножают числа из $\boldsymbol{Z}(2)$ как рациональные числа, затем результат записывают в стандартном виде. Для любых x, $y \in \boldsymbol{Z}(2)$ имеем $x + y \in \boldsymbol{Z}(2)$, $-x \in \boldsymbol{Z}(2)$ и $x \cdot y \in \boldsymbol{Z}(2)$.

Следовательно, множество (2)-обратимых чисел обладает всеми теми свойствами, которыми обладают целые числа.

Понятие нормы $n(x)$ элемента $x \in \boldsymbol{Z}(2)$ введем для случаев $x = 0$ и $x = \alpha\dashv 2^{\wedge}$ - стандартной записи элемента $x \neq 0$.

<u>Определение.</u> Нормой n назовем соответствие $\boldsymbol{Z}(2) \to \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, удовлетворяющее условиям: $n(0) = 0$; $n(\alpha\dashv 2^{\wedge}) = |a|$ для числа в стандартной записи.

***Примеры.* 1.** $n(3 \cdot 2^3) = |3| = 3$ в $\boldsymbol{Z}(2)$.

2. $n(6 \cdot 2^{-5}) = n(3 \cdot 2^{-4}) = 3$ в $\boldsymbol{Z}(2)$.

Свойства нормы

1. $n(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Доказательство. Пусть $n(x) = 0$. Если предположить $x \neq 0$, то можно представить число x в стандартном виде $x = a \cdot 2^{\alpha}$, где a не делится на 2. Тогда по определению нормы $n(x) = |a|$. Значит, $|a| = 0$, отсюда $a = 0$. Противоречие, значит, $x = 0$. Обратно, при $x = 0$ имеем $n(x) = 0$ по определению.

2. $n(1) = 1$.
3. $n(x) = 1$ тогда и только тогда , когда $x = 2^{\alpha}$ или $x = -2^{\alpha}$.
4. $n(xy) = n(x)n(y)$ для любых чисел из $\boldsymbol{Z}(2)$.

2.2. Деление без остатка 2-обратимых чисел

Делимость без остатка (2)-обратимых чисел определяется аналогично делимости целых чисел.

<u>Определение.</u> Число $\alpha\dashv 2^{\urcorner\wedge}$ делится на число $\beta\dashv 2^{\llcorner\times}$ (a, b не делятся на 2), если существует число $\chi\dashv 2^{\text{вл}}$ (c не делится на 2), такое, что $\alpha\dashv 2^{\urcorner\wedge} = \beta\dashv 2^{\llcorner\times} \cdot c \cdot 2^{y}$.

Число $\beta\dashv 2^{\llcorner\times}$ называется делителем числа $a \cdot 2^{\alpha}$.

Свойства делимости 2-обратимых чисел.

1. Число 0 можно представить в виде произведения $0 \cdot x$ для любого $x \in \boldsymbol{Z}(2)$.

2. Если число $x \neq 0$, то 0 единственное число, удовлетворяющее условию $0 = 0 \cdot x$.

Действительно, если $0 = x \cdot y$, то умножив слева на x^{-1} обе части этого равенства, получим $y = 0$.

3. Если $x \neq 0$, и для любого $z \in \boldsymbol{Z}(2)$ такого, что z делится на x, существует единственное число из $\boldsymbol{Z}(2)$, удовлетворяющее условию $z = x \cdot y$.

Пусть $z = x \cdot y_1$ и $z = x \cdot y_2$, тогда $0 = x(y_1 - y_2)$. Отсюда, в силу свойства 2, $y_1 - y_2 = 0$. Значит, число $y = x^{-1}z$ – единственное, удовлетворяющее условию $z = x \cdot y$, в этом случае y называется частным от деления z на x.

4. Если $x \neq 0$, то равенство $x = 0 \cdot y$, не имеет места для любого числа $y \in \boldsymbol{Z}(2)$.

Это свойство выполняется, так как $0 \cdot y = 0$. Действительно, $0 \cdot y = (0 + 0) \cdot y$. Отсюда , $0 \cdot y = 0 \cdot y + 0 \cdot y$, значит , $0 \cdot y = 0$.

5. Свойства 1, 3, 4 являются основой заключению – на нуль делить нельзя.

6. Число делится на число (a, b не делятся на 2) тогда и только тогда, когда a делится на b в целых числах $\boldsymbol{Z}$.

Доказательство. Из определения делимости в $\boldsymbol{Z}(2)$, следует равенство $\alpha\dashv 2^{\urcorner\wedge} = \beta\dashv 2^{\llcorner\times} \cdot c \cdot 2^{y}$. Нормы левой и правой частей этого равенства совпадают: $|a| = |bc|$. Поэтому $a = bc$ или $a = b(-c)$. Отсюда следует, что a делится на b.

Обратно, если a делится на b в $\boldsymbol{Z}$, то $a = bc$, поэтому , что означает делимость числа на число в $\boldsymbol{Z}(2)$.

7. Любое число делится на число .

Действительно, a делится на 1 и -1 в $\boldsymbol{Z}$, поэтому, в силу свойства 6, утверждение доказано.

<u>Определение.</u> Число x называется обратимым в $\boldsymbol{Z}(2)$, если существует число $y \in \boldsymbol{Z}(2)$, удовлетворяющее условию $xy = 1$.

Из определения следует, что 0 не может быть обратимым числом. Имеет место

<u>Теорема.</u> Элемент $x \in \boldsymbol{Z}(2)$ обратим тогда и только тогда, когда $n(x) = 1$.

Доказательство. Если x – обратим, то $xy = 1$ для некоторого числа y $\boldsymbol{Z}(2)$. Тогда $n(xy) = n(1)$, поэтому $n(x)n(y) = 1$, значит, натуральное число $n(x)$ является делителем 1 в $\boldsymbol{Z}$. Но единственным натуральным делителем 1 в $\boldsymbol{Z}$ является 1.

Обратно. Пусть x= и $n(x) = 1$, тогда $|a| = 1$, следовательно, обратное число имеет вид $y = 2$-, действительно, $xy = 1$.

<u>Следствие.</u> Число $x \in \boldsymbol{Z}(2)$ обратимо тогда и только тогда, когда x =.

Доказательство. Из доказанной теоремы следует, что x обратим тогда, когда $n(x) = 1$. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда $x = \pm 2$ (свойство 3 нормы).

***Примеры.* 1.** В $\boldsymbol{Z}(2)$ обратимыми являются числа $\pm 2, \pm 2^2, \ldots, \pm 2^k, \ldots, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \ldots$.

2. Число 3 в $\boldsymbol{Z}(2)$ необратимо. Действительно, пусть $3 \cdot (a \cdot 2^{\alpha}) = 1$, тогда $|3| \cdot |a| = 1$. Отсюда 3 является делителем единицы в $\boldsymbol{Z}$. Противоречие. Значит, 3 - необратимый элемент в $\boldsymbol{Z}(2)$.

3. Число 6 является необратимым в $\boldsymbol{Z}(2)$. Действительно, $6 = 3 \cdot 2$. Отсюда $n(6) = 3 \neq 1$.

Простые и составные числа в Z(2)

Из 7 свойства делимости в $\boldsymbol{Z}(2)$ и следствия теоремы можно сделать вывод, что любое число x из $\boldsymbol{Z}(2)$ делится на каждое обратимое число. Из 6 свойства делимости вытекает, что любое число $x \in \boldsymbol{Z}(2)$ делится на числа, норма которых равна норме числа x. Такого вида делители есть у каждого числа $x \in \boldsymbol{Z}(2)$, они называются тривиальными, иначе – несобственными делителями числа x.

<u>Определение.</u> Число $x \in \boldsymbol{Z}(2)$ называется простым, если оно не равно 0, необратимо и не имеет делителей, отличных от тривиальных.

<u>Определение</u>. Число $x \in \boldsymbol{Z}(2)$ называется составным, если оно отлично от 0, необратимо и его можно представить в виде произведения двух необратимых в $\boldsymbol{Z}(2)$ чисел.

***Примеры.* 1.** Число 3 – простое в $\boldsymbol{Z}(2)$. Для доказательства этого утверждения покажем, что число 3 удовлетворяет всем требованиям определения простого числа. (1) число 3 отлично от 0; (2) 3 – необратимое число в $\boldsymbol{Z}(2)$, так как $n(3) = n(3 \cdot 2^0) = 3 \neq 1$. (3) Покажем, что число 3 не имеет нетривиальных (собственных) делителей. Пусть $3 = (a \cdot 2^{\alpha}) \cdot (b \cdot 2^{\beta}) = (ab)\, 2^{\alpha+\beta}$ (a и b не делятся на 2). Тогда, что $n(3) = |ab|$ или $3 = |a| \cdot |b|$. Значит, $|a| = 3$ и $|b| = 1$, либо $|a| = 1$ и $|b| = 3$. Значит, делители числа 3 в $\boldsymbol{Z}(2)$ являются тривиальными. Следовательно, число 3 является простым в $\boldsymbol{Z}(2)$.

2. Аналогично можно доказать, что числа $\pm 3 \cdot 2^{\alpha}$ простые в $\boldsymbol{Z}(2)$ для каждого значения $\alpha \in \boldsymbol{Z}$. В частности, числа 6, 12, 24; - 6, -12, - 24; $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}$ являются простыми числами в $\boldsymbol{Z}(2)$.

2.3. Деление с остатком 2-обратимых чисел

Пусть $x = \alpha$ 2, $y = \beta$ 2 – произвольные числа из $\boldsymbol{Z}(2)$, записанные в стандартном виде. В $\boldsymbol{Z}$ разделим a на b с остатком:

(1) $$a = bq + r,\ |r| < |b| \text{ или } r = 0.$$

При $r = 0$ a делится на b, тогда x делится на y. Делимость в $\boldsymbol{Z}(2)$ описана выше. Умножив обе части равенства (1) на 2^{α}, после несложных преобразований правой части полученного равенства получим

$$a \cdot 2^{\alpha} = b \cdot 2^{\beta} \cdot q \cdot 2^{\alpha-\beta} + r \cdot 2^{\alpha}.$$

Числа $q \cdot 2^{\alpha-\beta}$ и $r \cdot 2^{\alpha}$ представим в стандартном виде, выделив в q и r степени 2. Тогда $x = y \cdot q_1 \cdot 2^{\alpha-\beta} + r_1 \cdot 2^{\alpha}$, причем $n(r_1) < n(y)$ или $r = 0$. Для $x = 0$ имеем $0 = 0 \cdot b \cdot 2^{\beta} + 0$.

Пример. Разделим в $\boldsymbol{Z}(2)$ число $421 \cdot 2^3$ на число $\frac{35}{2}$ с остатком.

Решение. Данные числа записаны в стандартном виде, так как 421 и 35 не кратны 2. Выполним описанный выше алгоритм.

Разделим 421 с остатком на 35: $421 = 35 \cdot 12 + 1$.

Умножим обе части полученного равенства на 2^3: $421 \cdot 2^3 = 35 \cdot 2^{-1} \cdot (12 \cdot 2^4) + 1 \cdot 2^3$.

Запишем все числа в стандартном виде и подставим их в полученное равенство: $12 \cdot 2^4 = 3 \cdot 2^6$, остальные имеют стандартный вид.

Получим: $421 \cdot 2^3 = (35 \cdot 2^{-1}) \cdot (3 \cdot 2^6) + 1 \cdot 2^3$.

Проверим, что последнее равенство представляет результат деления числа $421 \cdot 2^3$ на число $\frac{35}{2}$ с остатком в $\boldsymbol{Z}(2)$. Для этого сравним нормы чисел $\frac{35}{2}$ и $1 \cdot 2^3$: $n(\frac{35}{2}) = 35$, $n(1 \cdot 2^3) = 1$.

Отсюда $n(1 \cdot 2^3) < n(\frac{35}{2})$. Все условия деления с остатком для чисел $421 \cdot 2^3$ и $\frac{35}{2}$ выполнены. При этом делении получили неполное частное $3 \cdot 2^6$ и остаток $1 \cdot 2^3$.

2.4. НОД 2-обратимых чисел. Алгоритм Евклида

Определение. 2–обратимое число $d \cdot 2^{\gamma}$ называют наибольшим общим делителем 2-обратимых чисел $a \cdot 2^{\alpha}$ и $b \cdot 2^{\beta}$, (целые числа a, b, d не кратны 2), если выполняются следующие два условия:

а) каждое из чисел $a \cdot 2^{\alpha}$ и $b \cdot 2^{\beta}$ делится на $d \cdot 2^{\gamma}$,

б) $d \cdot 2^{\gamma}$ делится на любой общий делитель $a \cdot 2^{\alpha}$ и $b \cdot 2^{\beta}$

Примеры. Найдем НОД(2,3) в $\boldsymbol{Z}(2)$. 3 делится на 2 в $\boldsymbol{Z}(2)$, так как $3 = 2 \cdot 3 \cdot 2^{-1}$ и число $3 \cdot 2^{-1}$ является 2-обратимым, значит, НОД(2,3) =2. С другой стороны, числа 2 и 3, делятся и на 2^2, и на 2^3, значит, наибольшего по абсолютной величине общего делителя у них нет, поэтому «школьное» определение НОД здесь нельзя применить. Все общие делители этих чисел имеют вид 2^{α}, где α - любое целое число, норма всех таких чисел равна 1, значит, НОД(2,3) = 1.

Из свойств делимости в $\boldsymbol{Z}(2)$ следует

Теорема. Наибольший общий делитель двух 2-обратимых чисел равен НОД их норм и определен с точностью до обратимого множителя.

2.5. Неопределенные уравнения в 2-обратимых числах

Неопределенное уравнение в 2-обратимых числах имеет вид

$$a \cdot 2^{\alpha} \cdot x + b \cdot 2^{\beta} \cdot y = c \cdot 2^{\delta},$$

где целые числа a, b, c не кратны 2, x, y – переменные, принимающие значения в $\boldsymbol{Z}(2)$.

Это уравнение имеет решение в $\boldsymbol{Z}(2)$ тогда и только тогда, когда целое число c делится на НОД(a,b) в $\boldsymbol{Z}$.

Покажем на примере процесс решения неопределенного уравнения в $\boldsymbol{Z}(2)$.

Пример. $\frac{35}{4}x - \frac{19}{2}y = 23$. Представим коэффициенты этого уравнения в стандартном виде: $35 \cdot 2^{-2} \cdot x - 19 \cdot 2^{-1} \cdot y = 23$. Наибольший общий делитель коэффициентов этого уравнения равен 1. Найдем линейное представление НОД($35 \cdot 2^{-2}, -19 \cdot 2^{-1}$) = 1.

В целых числах $35 \cdot 6 + (-19) \cdot 11 = 1$.

Умножим обе части этого равенства на 23: $35 \cdot 138 + (-19) \cdot 253 = 23$.

Перейдем к 2-обратимым числам: $35 \cdot 2^{-2} \cdot 138 \cdot 2^{2} + (-19) \cdot 2^{-1} \cdot 253 \cdot 2 = 23$.

Частное решение исходного уравнения представим в стандартном виде $x_0 = 138 \cdot 2^2 = 69 \cdot 2^3$, $y_0 = 253 \cdot 2$, тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$\begin{cases} x = 69 \cdot 2^3 - 19 \cdot 2^{-1} \cdot t, \\ y = 253 \cdot 2 - 35 \cdot 2^{-2} \cdot t. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 552 - \frac{19}{2} \cdot t, \\ y = 506 - \frac{35}{4} \cdot t. \end{cases}$$

Здесь t- 2-обратимое число.

Вывод. Знакомство с теорией 2-обратимых чисел, расширяет наши представления о числовых множествах, помогает глубже понять арифметику целых чисел, расширяет наши возможности при решении неопределенных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитин Н.Д. Никитина О.Г. Теория чисел: учебное пособие. Пенза: Изд-во ПГУ, 2016. – 100с.
2. Монахова О.А., Султанов А.Я. О некоторых евклидовых кольцах в поле рациональных чисел // **Педагогический институт им. В. Г. Белинского: традиции и инновации** : сб. ст. науч. конф., посвящ. 80-летию Педагогического института им. В. Г. Белинского Пензенского государственного университета. Пенза: Изд-во ПГУ, 2019.